

Logique Floue dans les Catégories Adhésives

Informations

Référents scientifiques Marc Aiguier et Romain Pascual

Laboratoire Mathématiques et Informatique pour la Complexité et les Systèmes (MICS)

Bureau SC. 123 et SC. 101, Bâtiment Bouygues

Mail marc.aiguier@centralesupelec.fr, romain.pascual@centralesupelec.fr

Contexte général du projet

La théorie des ensembles flous, introduite par *L. Zadeh* en 1965 [5], étend la théorie classique des ensembles en attribuant à chaque élément un *degré d'appartenance*. Un ensemble flou est ainsi défini par une application $\mu : S \rightarrow L$, où S est un ensemble et L un treillis résidué (souvent l'intervalle $[0, 1]$ muni d'une t-norme et d'une t-conorme). La valeur $\mu(s)$ exprime alors le degré auquel s appartient à S .

À la même époque, *Grothendieck*, *Lawvere* et d'autres ont développé une généralisation beaucoup plus abstraite de la théorie des ensembles : la *théorie des topos élémentaires* [4, 1]. Fondée sur la théorie des catégories [3], elle permet de retrouver, dans un cadre très général, la plupart des propriétés essentielles des ensembles. Un topos possède notamment une *logique interne d'ordre supérieur*, qui permet de raisonner sur ses objets et morphismes comme s'il s'agissait d'ensembles et de fonctions.

Dans un travail récent, nous avons proposé une *formulation catégorique de la logique floue*. Nous avons généralisé la notion d'ensemble flou à une catégorie $\mathcal{C}$ en définissant un *objet flou* comme un foncteur $\mu : \mathcal{C}/X \rightarrow L$, où $\mathcal{C}/X$ désigne la *slice category* associée à un objet X de $\mathcal{C}$. La *catégorie des objets flous*, notée $Fuzz(\mathcal{C})$, vérifie les propriétés d'un topos élémentaire, ce qui permet d'y définir une logique interne adaptée.

Les *catégories adhésives* [2] constituent, quant à elles, un cadre formel garantissant le bon comportement des colimites nécessaires à la *réécriture algébrique*. Elles offrent ainsi une base solide pour l'étude des transformations de structures. Comme les topos élémentaires sont des catégories adhésives, les outils de la réécriture peuvent y être appliqués directement.

Description du sujet

Le travail proposé dans ce parcours recherche est d'étudier si la catégorie des objets flous $Fuzz(\mathcal{C})$ définie à partir d'une catégorie adhésive reste une catégorie adhésive.

Compétences souhaitées (ou à acquérir)

- Intérêt pour les fondements mathématiques et la modélisation abstraite (théorie des catégories, topoi)
- Bases en logique (logique floue) et en structures discrètes (graphes, ensembles, relations).

Références

- [1] P. Johnstone. *Sketches of an Elephant : A Topos Theory Compendium. Vol1. and Vol.2.* Oxford University Press, 2002.
- [2] Stephen Lack and Paweł Sobociński. Adhesive and quasiadhesive categories. *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications*, 39(3) :511–545, July 2005.
- [3] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician.* Springer-Verlag, 1971.
- [4] S. McLane and I. Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic : A first introduction to topos theory.* Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] L.-A. Zadeh. Fuzzy sets. *Fuzzy sets, Information and Control*, 8 :338–353, 1965.